I/4

1	2	3	4	5
B	B	B	B-	B

Calif.
A

Apellido y Nombre: [redacted] Mail: ROMANIMANGA@GMAIL.COM

Libreta: [redacted] Turno: 14 a 17 | 19 a 22

Álgebra Lineal - Segundo Cuatrimestre 2017

Segundo Parcial (1/12/2017)

---

1. Hallar todas las posibles formas de Jordan de la matriz $A \in \mathbb{C}^{10\times 10}$ sabiendo que cumple, simultáneamente,
   - $(A - 2\mathrm{Id})^3(A - \mathrm{Id})^4 = 0$,
   - $\mathrm{rg}(A - \mathrm{Id}) = 8, \quad \mathrm{rg}(A - \mathrm{Id})^2 = \mathrm{rg}(A - \mathrm{Id})^3 = 7$,
   - $\dim(\mathrm{Nu}((A - 2\mathrm{Id})^2)) = 5$.

---

2. Sean $(V, \langle , \rangle)$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto interno y $\beta = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base ortonormal de V. Sean $v = 8v_1 + 5v_2 + 2v_3 + v_4 \in V$ y S el subespacio
$$S = \langle v_1 + 2v_2 + 2v_4, 2v_2 - v_4 \rangle.$$
Decidir si v está más cerca de S o de su complemento ortogonal $S^\perp$.

---

3. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita con producto interno. Dados $v, w \in V \setminus \{0\}$, se define $T : V \to V$ como $T(u) = \langle u, v\rangle w$ para todo $u \in V$.
   (a) Probar que T es una transformación lineal y hallar T^*.
   (b) Probar que T es autoadjunta si y solo si v es múltiplo de w.

---

4. Sean $L = \langle (4, -3, 0)\rangle + (1, 2, 3)$ y $L' = \langle (0, 0, 1)\rangle + (8, 3, -2)$ dos rectas en $\mathbb{R}^3$. Hallar una recta L'' alabeada con ambas tal que $\mathrm{d}(L, L'') = \mathrm{d}(L', L'')$. ¿Es L'' única?

---

5. Sea $\Phi : \mathbb{Q}^4 \times \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}$ la forma bilineal cuya matriz en la base canónica es
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$
Hallar una base B de $\mathbb{Q}^4$ tal que la matriz $|\Phi|_B$ sea diagonal.

Justificar todas las respuestas

[redacted] Ej 1 y 2

FECHA

1 – • $(A-2Id)^3(A-Id)^4=0$

$\exists B$ una base de $\mathbb{C}^{10\times 10}$ / $|A|_B = J_A$ donde J_A es una forma de Jordan.

– J_A tiene en su diagonal solo "1" o "2".
– $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$. Bloques de diagonal λ_1 son de a lo sumo 4×4 y de diagonal λ_2 a lo sumo 3×3.

• $rg(A-Id)=8$, $rg(A-Id)^2 = rg(A-Id)^3 = 7$

– Hay dos bloques de λ_1 ($rg(A-Id)=8$)
– Un bloque es de 1×1 y el otro de 2×2. Entonces lo restante es una matriz de Jordan de autovalor λ_2 de 7×7.

• $\dim(Nu((A-2Id)^2)) = 5$

– Propongo que, dado que debo tener una matriz de Jordan de diagonal λ_2 de 7×7, la única configuración de bloques posible es: 3×3, 3×3, 1×1.

Veamos que no puede haber más de 3 bloques:

◇ Si hay 5 o más: $Nu(A-2Id) \geq 5$. Si es exactamente 5, dado que ~~hay tal~~ la matriz de Jordan de λ_2 es de 7×7, $Nu((A-2Id)^2) > 5$.

◇ Si hay 4: $Nu(A-2Id)=4$ y $Nu((A-2Id)^2)=5$. La única configuración que admite esto es tener un bloque de 4×4 y los demás de 1×1; pero el mayor bloque es de 3×3.

◇ Si hay 3: la otra alternativa es que sean 3×3, 2×2, 2×2. Pero en ese caso $Nu((A-2Id)^2)=6$

◇ Para que haya menos de 3, alguno debería ser mayor a 3×3.

→ Todas las formas de Jordan de una matriz A que cumpla el enunciado son semejantes a:

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & & & & & & & & \\
1 & 1 & 0 & & & & & & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & & & & & & \\
 & & 0 & 2 & 0 & 0 & & & & \\
 & & 0 & 1 & 2 & 0 & & & & \\
 & & & 0 & 1 & 2 & & & & \\
 & & & 0 & 0 & 0 & & & & \\
 & & & & & 0 & 2 & & & \\
 & & & & & & 1 & 2 & 0 & \\
 & & & & & & 0 & 2 & 2 &
\end{pmatrix}$$

2- Como β es Base ortonormal, $\langle v_i ; v_i \rangle = 1$ y $\langle v_i ; v_j \rangle = 0$ si $i \neq j$

Busco una base ortogonal de S. Para eso uso Gram-Schmidt sobre los generadores de S.

$$\langle 2v_2 - v_4 ; v_1 + 2v_2 + 2v_4 \rangle = \langle 2v_2 ; v_1 + 2v_2 + 2v_4 \rangle - \langle v_4 ; v_1 + 2v_2 + 2v_4 \rangle$$
$$= 4 - 2$$
$$= 2$$

(Separando las sumas y sacando escalares por bilinealidad del producto interno en un $\mathbb{R}$-e.v.; y usando que β es base ortonormal {o aplicando el P. I. canónico sobre las coordenadas de los vectores en β).

~~$\Rightarrow B_S = \{ v_1 + 2v_2 + 2v_4 \}$~~

$$\|v_1 + 2v_2 + 2v_4\|^2 = \langle v_1 + 2v_2 + 2v_4 ; v_1 + 2v_2 + 2v_4 \rangle = 9$$

$\Rightarrow B_S = \{ v_1 + 2v_2 + 2v_4 ; 2v_2 - v_4 - \frac{2}{9}(v_1 + 2v_2 + 2v_4) \}$ es una base ortogonal de S. Para hallar las distancias de $\vec{v}$ a S y $S^\perp$ voy a proyectar ortogonalmente, porque $d(v, S) = \|v - P_S(v)\|$ donde P_S es el proyector ortogonal sobre S. ($B_S = \{ s_1 ; s_2 \}$). $d(v, S^\perp) = \|P_S(v)\|$ porque $P_{S^\perp}(v) = v - P_S(v)$.

$$P_S(v) = s_1 \cdot \frac{\langle v, s_1 \rangle}{\|s_1\|^2} + s_2 \frac{\langle v, s_2 \rangle}{\|s_2\|^2}$$

Similarmente hallo $\langle v ; s_1 \rangle$ y $\langle v ; s_2 \rangle$

$\langle v ; s_1 \rangle = 20$

$\langle v ; s_2 \rangle = 67$

$$\|s_2\|^2 = \langle s_2 , s_2 \rangle = \langle \tfrac{14}{9} v_2 - \tfrac{2}{9} v_1 - \tfrac{13}{9} v_4 ; \tfrac{14}{9} v_2 - \tfrac{2}{9} v_1 - \tfrac{13}{9} v_4 \rangle = \frac{369}{81} = \frac{41}{9}$$

$\Rightarrow P_S(v) = s_1 \cdot \frac{20}{9} + s_2 \cdot \frac{67 \cdot 9}{41}$. Comparo entonces $\|v - P_S(v)\|$ contra $\|P_S(v)\|$.

$$\|P_S(v)\| = \left\| \frac{20}{9} s_1 + \frac{67 \cdot 9}{41} s_2 \right\| = \langle \tfrac{20}{9} s_1 + \tfrac{67 \cdot 9}{41} s_2 ; \tfrac{20}{9} s_1 + \tfrac{67 \cdot 9}{41} s_2 \rangle = \left(\frac{20}{9}\right)^2 \langle s_1 ; s_1 \rangle + \left(\frac{67 \cdot 9}{41}\right)^2 \langle s_2 ; s_2 \rangle$$

ya que $\langle s_1 ; s_2 \rangle = 0$. $\Rightarrow \|P_S(v)\| = \boxed{\sqrt{\frac{20^2}{9} + \frac{67^2 \cdot 9}{41}}} \approx 32,1$

$[v - P_S(v)]_\beta = \left(\frac{3338}{369} ; \frac{-8237}{369} ; 2 ; \frac{6568}{369} \right)$ y su norma es $\approx 29,76$

$\Rightarrow$ v está más cerca de $S^\perp$

[redacted] 3 y 5

3- a) $T(u)=\langle u,v\rangle w$

• $T(u+h)=\langle u+h,v\rangle w$
$=(\langle u,v\rangle+\langle h,v\rangle) w$
$=\langle u,v\rangle w+\langle h,v\rangle w$
$=T(u)+T(h)$

Uso que el P. I. sobre un $\mathbb{R}$-ev. es bilineal.

• $T(\lambda u)=\langle \lambda u,v\rangle w$
$=\lambda\langle u,v\rangle w=\lambda T(u)$

Propongo como adjunta para T a H, $H(\emptyset)=\langle w,\emptyset\rangle v$ para los mismos v y w definidos en T y $\forall \emptyset \in V$. Veamos que es su adjunta.

$\langle T(u),z\rangle=\langle\langle u,v\rangle w,z\rangle=\langle u,v\rangle\langle w,z\rangle$ Por bilinealidad
$\langle u,H(z)\rangle=\langle u,\langle w,z\rangle v\rangle=\langle u,v\rangle\langle w,z\rangle$
Como $\langle T(u),z\rangle=\langle u,H(z)\rangle$ $\forall u,z\in V$, H es la adjunta de T.

b) $(\Leftarrow)$ $v=\lambda w$. $\langle T(u),z\rangle=\langle\langle u,\lambda w\rangle w,z\rangle=\lambda\langle u,w\rangle\langle w,z\rangle$

$\langle u,T(z)\rangle=\langle u,\langle z,\lambda w\rangle w\rangle=\lambda\langle z,w\rangle\langle u,w\rangle$

$\langle T(u),z\rangle=\langle u,T(z)\rangle$ $\forall u,z\in V$.

$(\Rightarrow)$

$\langle T(u),z\rangle=\langle u,v\rangle\langle w,z\rangle$. Me gustaría que esas expresiones sean la
$\langle u,T(z)\rangle=\langle u,w\rangle\langle v,z\rangle$ misma $\forall u,z\in V$. En particular, para
$z=v$, $u=w$

$\rightarrow \langle T(w),v\rangle=\langle w,v\rangle\langle w,v\rangle$
$\langle w,T(v)\rangle=\langle w,w\rangle\langle v,v\rangle=\|w\|^2.\|v\|^2$

Por Cauchy-Schwarz, $|\langle a,b\rangle|\leq\|a\|\|b\|$ y la igualdad vale solo si a es múltiplo de b. $\Rightarrow$
$\langle w,v\rangle^2\leq\|w\|^2\|v\|^2$. Como quiero que valga la igualdad,

$v=\lambda w$ □ $\|$ por C-S

5 - Sea $A = |\Phi|_E$. Como A es simétrica, $\exists$ base y puedo encontrar una matriz P / $P^t A P$ es diagonal.

Procedo haciendo las mismas operaciones sobre filas y columnas para hallar P.

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & Id & \\ 0 & & & \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & & & \\ 0 & & Id & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = A'$.

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & & & \\ -\frac{1}{2} & & Id & \\ 0 & & & \end{pmatrix} A' \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & Id & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = A''$

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A'' \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = A'''$

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix} A''' \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = |A|_B$

Hallo el producto de las matrices con que multipliqué a A por derecha y sus columnas serán los vectores de la base B puestos en la base canónica.
El producto de esas matrices me quedó:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{4} & \frac{2}{5} & -1 \\ 1 & \frac{1}{4} & -\frac{4}{5} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que $B = \left\{ (1,1,0,0),\ \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0\right),\ \left(\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, 1, 0\right),\ \left(-1, 2, -\frac{5}{2}, 1\right) \right\}$

Fijate que si empezabas permutando y no sumando las cuentas se simplificaban bastante

[illegible]

4) $L_1 = \langle 4,-3,0 \rangle + (1,2,3)$ $\quad L_3 = (S_1+S_2)^{\perp}$

$L_2 = \langle 0,0,1 \rangle + (8,3,-2)$. $\quad L_2 = (S_1+S_3)^{\perp}$

$L_3 = \langle -3,4,0 \rangle + P_3$ $\quad L_1 = (S_3+S_2)^{\perp}$

• $d(L_3;L_1) = \| P_{(S_3+S_1)^{\perp}}(P_3-P_1)\| = \| P_{S_2}(P_3-(1,2,3))\|$

$\rightarrow P_{S_2}(P_3-(1,2,3)) = (0,0,1)\langle (0,0,1); P_3-(1,2,3)\rangle = (0,0,1)(-3+\langle (0,0,1); P_3\rangle)$

• $d(L_2,L_3) = \| P_{(S_2+S_3)^{\perp}}(P_3-(8,3,-2))\| = \| P_{S_1}(P_3-(8,3,-2))\|$

$\rightarrow P_{S_1}(P_3-(8,3,-2)) = \dfrac{\langle P_3-(8,3,-2); (4,-3,0)\rangle}{\|4,-3,0\|^2} \cdot (4,-3,0)$

$= (\langle P_3; (4,-3,0)\rangle - 23)\dfrac{(4,-3,0)}{25}$

Pido que ambas normas sean iguales. Las respectivas normas son

$\|(3-\langle (0,0,1); P_3\rangle\|$; $\|\langle P_3, (4,-3,0)\rangle - 23\| \cdot \frac{1}{5}$

$P_3 = (x; y; z)$.

$\Rightarrow \|3-z\| = \|4x-3y-23\| \cdot \frac{1}{5}$. Tengo un subespacio de soluciones.

Considero, por ejemplo, el ~~(0,0,20)~~. $(0;-1;-1)$.

$\rightarrow$ la recta $L_3 = \langle(-3;4;0)\rangle + (0;-1;-1)$ cumple lo pedido y no es única.